

# La conduzione termica

## Generalità sulla trasmissione del calore

Lo scambio termico che si realizza tra sistemi termodinamici distinti o tra porzioni distinte di un sistema termodinamico è la forma di energia trasferita in presenza di una differenza di temperatura. L'esistenza dell'equilibrio termico tra due punti, individuato dall'uguaglianza delle temperature dei due punti considerati, preclude qualsiasi scambio di calore tra gli stessi.

I meccanismi che presiedono allo scambio termico sono molto diversi a seconda del mezzo attraverso il quale il trasferimento di calore si realizza.

Nel caso di un mezzo solido, le molecole non possono muoversi che in un intorno della propria posizione di equilibrio. Il trasferimento di calore deve avvenire tramite la propagazione del moto oscillatorio delle molecole (meccanismo fononico) oppure anche tramite lo spostamento degli elettroni di conduzione (meccanismo elettronico), qualora il solido sia anche un conduttore elettrico. In generale si parla di trasmissione del calore per **conduzione termica**.

Nel caso di un mezzo fluido, sia esso liquido o gassoso, al meccanismo conduttivo si sovrappone, spesso prevalendo su questo in termini quantitativi, il meccanismo convettivo. Nella **convezione termica** l'energia è trasferita da una posizione ad un'altra per effetto dello spostamento relativo di molecole con un diverso contenuto energetico, sia a seguito di un processo meramente diffusivo, sia a seguito di un rimescolamento indotto della massa fluida. Tale rimescolamento può essere legato all'insorgere di un gradiente di densità legato a quello di temperatura in presenza di un campo di forze esterne di volume che può innescare moti convettivi (convezione naturale), oppure può essere indotto artificialmente a seguito della movimentazione del fluido (convezione forzata). In entrambi i casi lo scambio termico quantificato nell'analisi è quello che intercorre tra una superficie solida che delimita il deflusso e il fluido che la lambisce.

Infine, il calore può anche essere scambiato in assenza di mezzo fisico, tra due sistemi che emettono e ricevono energia termica sotto forma di onde elettromagnetiche. In parte le radiazioni elettromagnetiche possono ricadere nel campo di lunghezze d'onda del visibile, comprese tra 0,4 e 0,7  $\mu\text{m}$ , nel qual caso sono percepite come radiazioni luminose. Il contenuto energetico più significativo, per quanto riguarda l'emissione da corpi alle temperature tecnicamente riscontrabili (da qualche decina di migliaia di kelvin alla temperatura ambiente) è tuttavia quello relativo alle lunghezze d'onda comprese tra 0,1 e 100  $\mu\text{m}$  (nel campo dell'ultravioletto, del visibile e dell'infrarosso). È questo l'intervallo di interesse per la **radiazione termica**.

Nelle applicazioni della tecnica il trasferimento di calore da un sistema ad un'altro o da una parte all'altra di un sistema è spesso legato alla sovrapposizione o alla successione di più di un meccanismo di scambio termico. Quando sono contemporaneamente presenti due o tre modi di scambio termico si parla di **scambio termico globale**.

## I meccanismi della conduzione

La conduzione termica interviene con meccanismi diversi a seconda che il mezzo di scambio termico si trovi in fase gassosa, liquida o solida. In genere si può schematizzare lo scambio termico come il trasferimento di energia ad opera di vettori di trasporto (fononi ed elettroni/lacune) in grado di accumulare e rilasciare energia e di spostarsi nel mezzo. La capacità di trasferimento termico per unità di tempo e attraverso una distanza unitaria, che come si vedrà è definita conduttività termica del materiale, dipende proprio da questi due aspetti.

Nei gas sono propriamente le molecole, nel proprio moto casuale, a trasferire il proprio contenuto energetico da una posizione ad un'altra. In caso di ionizzazione alle molecole si aggiungono anche gli elettroni. Sulla base di alcune considerazioni si può legare la conduttività termica dei gas a densità, calore specifico, dalla velocità del suono nel mezzo (ovvero dalla velocità media quadratica delle molecole, entrambe dipendenti dalla temperatura) e dal cammino libero medio delle molecole (il percorso medio percorso da una molecola prima di una collisione). In genere la conduttività aumenta con la temperatura con un esponente compreso tra 0,5 e 0,7.

$$\lambda = \lambda_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n$$

Nei liquidi i meccanismi sono analoghi a quelli dei solidi, distinguendo anche tra conduttori e non conduttori elettrici. Per una stessa sostanza il passaggio dallo stato solido allo stato liquido comporta una riduzione della conduttività termica. Rispetto all'aumento di temperatura si ha dapprima un aumento e poi una diminuzione, mentre con la pressione la conduttività aumenta leggermente.

Nei solidi conduttori elettrici la componente elettronica è particolarmente rilevante. Il cammino libero per gli elettroni è condizionato dalle collisioni tra elettroni, tra elettroni e fononi e tra elettroni e difetti reticolari. Ciò condiziona anche la conducibilità elettrica, al punto che si può stabilire una correlazione tra le due grandezze, nella forma della legge di Wiedemann-Franz:

$$\lambda = L \frac{T}{\rho}$$

dove  $L$  è la costante di Lorenz e  $\rho$  è la resistività elettrica.

Ad alte temperature la vibrazione reticolare viene tuttavia ad interferire disperdendo gli elettroni e riduce la conduttività elettrica. Effetti di riduzione della conduttività si hanno anche in presenza di impurezze. In presenza dei due meccanismi fononico ed elettronico, la resistività termica può essere valutata come somma delle due componenti elettronica e fononica:

$$\frac{1}{\lambda} = M \cdot T^2 + \frac{N}{T}$$

La conduttività termica viene quindi ad assumere un andamento in funzione della temperatura caratterizzato da un massimo.

## La legge di Fourier nella conduzione termica

In un sistema fisico l'analisi della conduzione può associare ad ogni punto in ogni istante il vettore **flusso termico**

$$\vec{q}(x, y, z, \tau)$$

Questo è il vettore che qualifica in termini di entità, direzione e verso la potenza termica che attraversa una superficie unitaria ortogonale alla direzione di flusso. Si tratta quindi di una grandezza specifica rispetto alla superficie di scambio: ha le dimensioni di una potenza su una superficie. In questo modo, all'interno del sistema considerato resta definito un campo vettoriale.

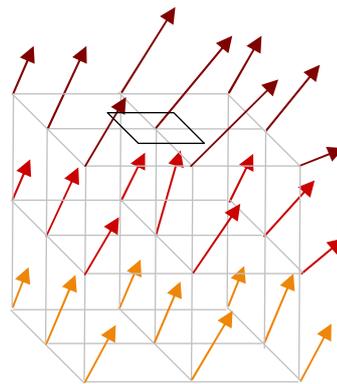


Fig. 1: Campo vettoriale del flusso termico.

Data una superficie infinitesima  $dA$  (fig. 2) attorno ad un punto  $(x, y, z)$ , la potenza termica che la attraversa nell'istante  $\tau$  è pari a

$$\begin{aligned} d\dot{Q}(x, y, z, \tau) &= \vec{q}(x, y, z, \tau) \cdot \vec{n} \cdot dA = \\ &= |\vec{q}(x, y, z, \tau)| \cdot \cos\beta \cdot dA \end{aligned}$$

dove  $\vec{n}$  è il versore unitario normale a  $dA$  e  $\beta$  è l'angolo tra la normale alla superficie e il flusso termico

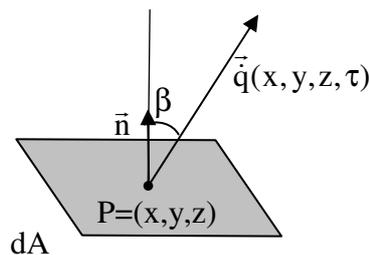


Fig. 2: Flusso e potenza termica infinitesima attraverso una superficie  $dA$

Ad ogni punto del sistema in un dato istante è inoltre possibile associare un valore di temperatura. Si definisce in questo modo un campo termico che rappresenta un particolare campo scalare.

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, \tau)$$

Se il campo termico e il campo di flusso termico sono indipendenti dal tempo il sistema si trova in regime stazionario.

Tutti i punti del sistema che si trovino in un dato istante alla medesima temperatura costituiscono un sottoinsieme isoterma, idealmente una superficie, nel cui ambito si ha equilibrio termico. Una superficie isoterma ad una data temperatura  $\bar{\vartheta}$  separa la parte di sistema a temperatura maggiore da quella a temperatura inferiore. La massima variazione di temperatura in corrispondenza di un certo punto del sistema si ha nella direzione del vettore gradiente (fig. 3), definito rispetto al sistema di coordinate cartesiane  $x, y, z$ , come

$$\nabla\vartheta(x, y, z, \tau) = \text{grad } \vartheta(x, y, z, \tau) = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\bar{u}_z$$

Per quanto esposto sopra risulta intuitivo associare empiricamente il flusso termico al gradiente termico. Si può scrivere pertanto:

$$\vec{q}(x, y, z, \tau) = -\lambda \cdot \nabla\vartheta(x, y, z, \tau)$$

ovvero

$$\vec{q}(x, y, z, \tau) = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\bar{u}_x + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\bar{u}_y + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\bar{u}_z \right)$$

Questa rappresenta la **legge di Fourier**<sup>1</sup> per la conduzione termica. Il segno negativo è coerente con il secondo principio della termodinamica: il vettore flusso ha infatti direzione uguale ma verso contrario a quello del massimo incremento della temperatura (fig. 3).

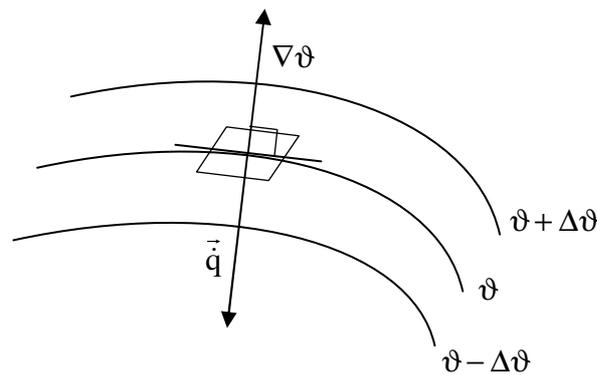


Fig. 3: Rappresentazione del gradiente di temperatura e del vettore flusso termico (caso bidimensionale)

Dato il carattere del tutto sperimentale, l'equazione rappresenta in effetti la definizione di **conduttività termica**, che per un dato materiale in generale è funzione sia della temperatura che della pressione:

$$\lambda(\vartheta, p) := \frac{|\vec{q}(x, y, z, \tau)|}{|\nabla\vartheta|}$$

In molti materiali, definiti per tale ragione **isotropi**,  $\lambda$  risulta effettivamente essere uno scalare, indipendente dalla direzione, con il flusso termico e il gradiente paralleli. Ciò significa che la capacità di un materiale di trasmettere calore per conduzione dipende dalla posizione, ma non dalla direzione. Nel seguito si assumerà che i materiali utilizzati

<sup>1</sup> Jean Baptiste Fourier (1768-1830) fu professore di Analisi presso l'Ecole Polytechnique di Parigi e dal 1807 membro dell'Accademia Francese delle Scienze. Il suo lavoro più rilevante (Théorie analytique de la chaleur, 1822) rappresenta la prima trattazione matematica esaustiva della teoria della conduzione termica. Contiene in particolare le serie di Fourier per la soluzione dei problemi relativi alla conduzione in regime transitorio.

siano, almeno in prima approssimazione, isotropi, anche se non mancano casi concreti di mezzi nei quali la conduttività termica dipende dalla direzione. Un esempio di materiale **anisotropo** è rappresentato dal legno che conduce calore tra le fibre meglio di quanto non faccia lungo le fibre stesse.

Nei mezzi anisotropi l'espressione della equazione di Fourier può essere conservata a condizione di considerare la conduttività  $\lambda$  come una matrice:

$$\vec{q}(x, y, z, \tau) = - \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\vartheta/\partial x \\ \partial\vartheta/\partial y \\ \partial\vartheta/\partial z \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare, in conseguenza dei principi della termodinamica degli irreversibili, che i coefficienti di conduttività rispettano le relazioni di reciprocità:

$$\lambda_{xy} = \lambda_{yx}, \lambda_{xz} = \lambda_{zx} \text{ e } \lambda_{yz} = \lambda_{zy}$$

Inoltre i valori sulla diagonale risultano sempre positivi.

Dato che la matrice è simmetrica può essere diagonalizzata con una opportuna scelta di assi coordinati (i, j, k), detti assi principali, di modo che

$$\vec{q}(i, j, k, \tau) = - \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\vartheta/\partial i \\ \partial\vartheta/\partial j \\ \partial\vartheta/\partial k \end{pmatrix}$$

I valori delle conduttività rispetto agli assi principali prendono il nome di conduttività principali. Si può desumere che le componenti del flusso termico nelle direzioni i, j, e k sono determinabili rispettivamente come:

$$\dot{q}_i = -\lambda_i \frac{\partial\vartheta}{\partial i} \quad \dot{q}_j = -\lambda_j \frac{\partial\vartheta}{\partial j} \quad \dot{q}_k = -\lambda_k \frac{\partial\vartheta}{\partial k}$$

Rispetto agli assi principali il materiale assume un comportamento ortotropico.

Si conclude ribadendo che solo per i materiali isotropi flusso termico e gradiente termico hanno la stessa direzione. Solo per questi si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} d\dot{Q}(x, y, z, \tau) &= -\lambda \cdot \nabla\vartheta \cdot \vec{n} \cdot dA = \\ &= -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial n} \cdot dA \end{aligned}$$

## L'equazione generale della conduzione termica

La soluzione di un problema di conduzione del calore richiede che risulti determinato il campo di temperature, sia nella sua distribuzione spaziale che in quella temporale. Una volta nota la dipendenza

$$\vartheta = \vartheta(x, y, z, \tau)$$

il vettore flusso termico può essere calcolato secondo la legge di Fourier

$$\vec{q}(x, y, z, \tau) = -\lambda \cdot \nabla\vartheta(x, y, z, \tau)$$

Per determinare il campo di temperature, si procede all'integrazione di una equazione differenziale alle derivate parziali che deriva dal bilancio del primo principio della termodinamica per un volume di controllo chiuso:

$$\dot{Q} - \dot{L} = \frac{dU}{d\tau}$$

Si assumerà in particolare che lo scambio di potenza meccanica (o elettrica) quando presente sia riconducibile ad un processo di generazione di calore nel volume di

controllo. Potrebbe essere ad esempio il caso del lavoro dissipato nel sistema sotto forma di attrito (lavoro di agitazione) o del passaggio di energia elettrica nel sistema con produzione di calore per effetto Joule. Nello stesso termine si includono inoltre gli effetti di reazioni chimiche (combustione) o nucleari, non considerati nella formulazione meccanica del primo principio. Si possono quindi associare tutti fenomeni di generazione interna di calore in uno specifico termine  $\dot{Q}_g$  distinto dal calore scambiato con l'esterno attraverso l'involucro  $\dot{Q}$

$$\dot{Q} + \dot{Q}_g = \frac{dU}{d\tau}$$

Mentre la generazione interna di calore e la variazione di energia interna sono fenomeni volumetrici, lo scambio termico con l'esterno è un fenomeno superficiale.

Si può scrivere

$$-\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dA + \int_V \dot{q}_g \cdot dV = \int_V \rho \frac{du}{d\tau} dV$$

dove  $\dot{q}_g$  è la potenza termica generata per unità di volume.

Per il teorema di Gauss, l'integrale superficiale del flusso scambiato è riconducibile ad un integrale di volume<sup>2</sup>

$$\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_V \text{div}(\vec{q}) \cdot dV$$

Da cui, per unità di volume

$$-\text{div}(\vec{q}) + \dot{q}_g = \frac{du}{d\tau}$$

In coordinate cartesiane (x, y, z), ricordando la legge di Fourier, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

In coordinate cilindriche (r,  $\varphi$ , z):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

In coordinate sferiche (r,  $\varphi$ ,  $\alpha$ ):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \lambda \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

L'espressione per le coordinate cilindriche può altresì essere ricavata impostando il bilancio del primo principio per un opportuno volume di controllo infinitesimo dV di dimensioni dx, dy e dz (fig. 4).

---

<sup>2</sup> In coordinate cartesiane la divergenza di un vettore  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  è  $\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

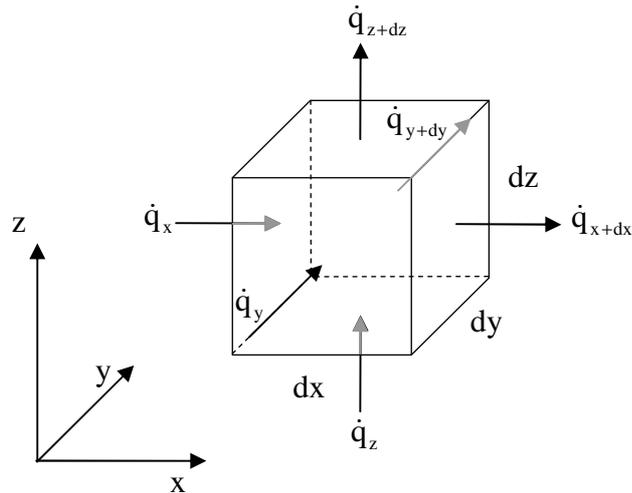


Fig. 4 Volume di controllo in coordinate cartesiane ortogonali

Considerando la potenza termica scambiata sulle superfici infinitesime e quella generata sul volume infinitesimo, l'equazione del primo principio

$$d\dot{Q} + d\dot{Q}_g = \frac{dU}{d\tau}$$

diventa:

$$\begin{aligned} & \dot{q}_x \cdot dy \, dz - \dot{q}_{x+dx} \cdot dy \, dz + \\ & \dot{q}_y \cdot dx \, dz - \dot{q}_{y+dy} \cdot dx \, dz + \\ & \dot{q}_z \cdot dx \, dy - \dot{q}_{z+dz} \cdot dx \, dy + \\ & \dot{q}_g \cdot dx \, dy \, dz = \rho \cdot c \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} \cdot dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

Ricordando che per la legge di Fourier

$$\dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

si può scrivere

$$\dot{q}_{x+dx} = \dot{q}_x + \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} dx = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx$$

da cui

$$(\dot{q}_x - \dot{q}_{x+dx}) dy \, dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz$$

Applicando l'ultima espressione a tutti gli assi coordinati

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) dx \, dy \, dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz + \dot{q}_g \cdot dx \, dy \, dz = \\ \rho \cdot c \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} \cdot dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

da cui si desume l'equazione generale della conduzione.

Nel caso in cui  $\lambda$  e  $c$  siano costanti nel tempo e indipendenti dalla posizione, l'equazione si semplifica come segue

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_g}{\lambda} = \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

ovvero, in forma più compatta ed indipendente dal sistema di riferimento

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{q}_g}{\lambda} = \frac{1}{a} \cdot \frac{d\vartheta}{d\tau} \quad \text{equazione di Fourier}$$

dove  $a$  è la **diffusività termica** del un materiale. In tale forma l'equazione generale della conduzione prende il nome di equazione di Fourier.

In condizioni di regime stazionario il secondo membro dell'equazione si annulla. Si ottiene l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{q}_g}{\lambda} = 0 \quad \text{equazione di Poisson}$$

Infine, se non si ha generazione interna di calore, si può scrivere l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \quad \text{equazione di Laplace}$$

L'equazione generale della conduzione da risolvere per determinare il campo di temperature e il flusso termico si presenta come una equazione differenziale del secondo ordine. La soluzione analitica è possibile solamente in alcune configurazioni relativamente semplici e richiede comunque la definizione delle costanti di integrazione. Ciò può avvenire grazie alla fissazione della:

- condizione iniziale sull'intero volume del sistema:

$$\vartheta(x, y, z, 0) = F_i(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in V$$

- condizione al contorno: caratterizza la situazione sui punti della superficie  $S$  di confine del sistema in ogni istante di tempo considerato

Le condizioni al contorno possono essere di tre tipi:

1) Condizioni del primo tipo  $\vartheta(x, y, z, \tau) = F_c(x, y, z, \tau) \quad \forall (x, y, z) \in S$

le condizioni si dicono omogenee quando il secondo membro è nullo (temperatura nulla alla superficie).

2) Condizioni del secondo tipo  $\frac{\partial \vartheta}{\partial n}(x, y, z, \tau) = F_c(x, y, z, \tau) \quad \forall (x, y, z) \in S$

fissano il flusso termico alla superficie; le condizioni si dicono omogenee quando il secondo membro è nullo (superficie adiabatica).

3) Condizioni del terzo tipo  $A\vartheta(x, y, z, \tau) + B \frac{\partial \vartheta}{\partial n}(x, y, z, \tau) = F_c(x, y, z, \tau) \quad \forall (x, y, z) \in S$

risultano da una combinazione lineare delle condizioni di primo e secondo tipo; condizioni omogenee del terzo tipo con funzione  $F_c$  costante individuano scambio termico convettivo alla superficie, con  $F_c$  pari al prodotto tra  $A$  e la temperatura del fluido,  $A$  pari al coefficiente di convezione e  $B$  alla conduttività termica.

Un caso particolare di condizioni al contorno riguarda il contatto termico tra due conduttori. In corrispondenza della superficie di separazione  $i$  tra il mezzo 1 e il mezzo 2, il bilancio del primo principio consente di scrivere:

$$\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} \Big|_i = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \Big|_i$$

A tale equazione si aggiunge l'uguaglianza delle temperature alla superficie nel caso di resistenza superficiale trascurabile:

$$\vartheta_1|_i = \vartheta_2|_i$$

Se invece è presente una resistenza di contatto specifica (per unità di superficie)  $r_c$ , il flusso termico in corrispondenza di tale resistenza sarà esprimibile come:

$$\vec{q} = \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2)_i}{r_c}$$

e

$$\vartheta_1|_i \neq \vartheta_2|_i$$

Anche il caso di convezione può essere assimilato a quello relativo al contatto tra due mezzi, il conduttore con temperatura superficiale  $\vartheta_1$  e il fluido con temperatura superficiale  $\vartheta_F$  esterna e la resistenza di contatto convettiva legata allo strato limite.

Nelle applicazioni più comuni la definizione del campo di temperature è resa più agevole dalla possibilità di assumere una configurazione monodimensionale. Ciò è possibile qualora la temperatura vari solo lungo una delle coordinate ( $x$  in coordinate cartesiane,  $r$  in coordinate cilindriche o sferiche). Nell'equazione della conduzione si omettono quindi il secondo e il terzo addendo al primo membro. In coordinate cartesiane si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

In coordinate cilindriche ( $r, \varphi, z$ ):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

In coordinate sferiche ( $r, \varphi, \alpha$ ):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \dot{q}_g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

Nel caso monodimensionale senza generazione interna e con conduttività indipendente da  $x$ , il segno della derivata seconda, e quindi l'andamento del profilo di temperatura in termini di concavità fornisce anche una indicazione sulla variazione di temperatura in corso nel sistema.

$$a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}$$

Ad un profilo con concavità rivolta in alto (derivata seconda positiva) corrisponde una variazione in aumento della temperatura, ad un profilo con concavità in basso (derivata seconda negativa) corrisponde una riduzione di temperatura. Se la derivata seconda è nulla, cioè il profilo è lineare, la temperatura non varia: il sistema è in regime stazionario.

## Conduzione termica in regime stazionario monodimensionale

### a) Casi senza generazione interna

Il campo di temperatura viene desunto dall'integrazione dell'equazione di Laplace, nella semplificazione consentita dalla monodimensionalità del sistema. Si considerano sistemi nei quali la conduttività termica risulta indipendente dalla temperatura.

#### a1) Strato piano

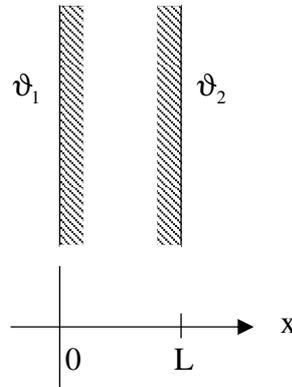


Fig. 5: Conduzione termica in regime stazionario: lo strato piano

Nel caso dello strato piano si integra l'equazione di Laplace nella forma

$$\lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0$$

Due integrazioni successive portano ad esprimere la temperatura in funzione dell'ascissa x come

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

sono richieste due condizioni al contorno per definire il valore delle costanti di integrazione. Con riferimento alla geometria del sistema rappresentata in fig. 5 si può imporre il valore delle due superfici che delimitano lo strato piano:

$$\vartheta(0) = \vartheta_1$$

$$\vartheta(L) = \vartheta_2$$

da cui

$$\vartheta_1 = C_2$$

$$\vartheta_2 = C_1 \cdot L + C_2$$

e infine

$$C_2 = \vartheta_1$$

$$C_1 = (\vartheta_2 - \vartheta_1) / L$$

Pertanto la distribuzione della temperatura varia linearmente tra il valore considerato per la superficie 1 e quello della superficie 2:

$$\vartheta(x) = \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{L} \cdot x + \vartheta_1$$

Dalla distribuzione di temperatura si passa a quantificare il flusso termico nella forma

$$\dot{q} = \dot{q}_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{L}$$

mentre la potenza termica scambiata in corrispondenza di un'area di scambio A risulta pari a

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{L} A(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

Si definisce coefficiente di scambio termico conduttivo (K) il rapporto

$$K = \frac{\lambda}{L}$$

mentre il rapporto tra potenza termica scambiata e differenza di temperatura è la resistenza termica conduttiva, che rappresenta la differenza di temperatura necessaria per indurre un flusso termico unitario:

$$R_{\text{cond}} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\dot{Q}} = \frac{L}{\lambda A}$$

La generalizzazione al caso di più strati piani adiacenti, ciascuno caratterizzato da una propria conduttività termica  $\lambda$  è relativamente agevole una volta evidenziato il fatto che in regime stazionario la potenza termica che attraverso ogni singolo strato deve essere necessariamente uguale a quella scambiata sull'intero spessore. Con riferimento ai simboli di fig. 6, dati n strati di spessore  $L_1, \dots, L_n$  e di conduttività  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , per ogni strato si può scrivere:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\lambda_1}{L_1} A(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ &\dots \\ \dot{Q} &= \frac{\lambda_i}{L_i} A(\vartheta_i - \vartheta_{i+1}) \\ &\dots \\ \dot{Q} &= \frac{\lambda_n}{L_n} A(\vartheta_n - \vartheta_{n+1}) \end{aligned}$$

Dato che la temperatura assume un valore unico in corrispondenza della superficie di separazione di due strati contigui, è possibile semplificare la dipendenza dalle temperature delle superfici intermedie sommando membro a membro le equazioni dopo aver moltiplicando entrambi i membri di ciascuna equazione per la rispettiva resistenza termica conduttiva:

$$\dot{Q} \cdot \sum_{k=1,n} \frac{L_k}{\lambda_k A} = (\vartheta_1 - \vartheta_{n+1})$$

da cui

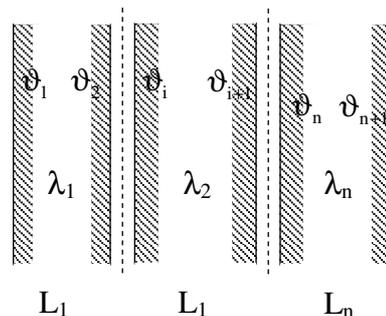


Fig. 6: Conduzione termica in uno strato piano composito.

$$\dot{Q} = \left( \sum_{k=1, n} \frac{L_k}{\lambda_k} \right)^{-1} A (\vartheta_1 - \vartheta_{n+1})$$

In molti casi le condizioni al contorno non prevedono di fissare direttamente la temperatura delle superfici ma lo scambio termico superficiale, in termini di potenza trasmessa per convezione con i fluidi che lambiscono le due superfici di delimitazione dello strato piano. Dato il regime stazionario, è evidente che la potenza termica scambiata tra la superficie 1 ( $x=0$ ) e il fluido che la lambisce, supposto a temperatura  $\vartheta_{F1}$ , deve essere uguale alla potenza scambiata tra le due superfici 1 e 2 ( $x=L$ ) per conduzione attraverso lo strato piano e alla potenza scambiata tra la superficie 2 e il fluido che la lambisce, supposto a temperatura  $\vartheta_{F2}$ . Introducendo sin d'ora la legge di Newton, che quantifica la potenza termica convettiva, e considerati  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  i coefficienti di convezione rispettivamente tra fluido 1 e superficie 1 e tra fluido 2 e superficie 2, si ha che

$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot A \cdot (\vartheta_{F1} - \vartheta_1)$$

$$\dot{Q} = \lambda/L \cdot A \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot A \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{F2})$$

da cui

$$\dot{Q} = A \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

La quantità

$$K = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$$

è il **coefficiente globale di scambio termico** per la geometria piana.

È banale l'estensione al caso di uno strato composito, che prevede la sostituzione del termine  $L/\lambda$  del singolo strato con la somma dei rispettivi rapporti  $L_k/\lambda_k$  dei diversi strati.

Incidentalmente si fa osservare che l'integrazione dell'equazione generale della conduzione potrebbe essere evitata nella particolare configurazione monodimensionale. A condizione di poter conoscere la relazione tra la superficie di scambio  $A$  e la variabile geometrica  $x$ , è infatti possibile integrare direttamente la legge di Fourier.

*Si consideri ad esempio uno strato piano di sezione di flusso non costante, ad esempio caratterizzato da una sezione  $A_1$  in corrispondenza dell'ascissa nulla  $x=0$ , e dipendenza  $A(x)$  pari a*

$$A(x) = k \cdot x + A_1$$

*La legge di Fourier*

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

*può essere integrata separando le variabili*

$$\dot{Q}_x \int_0^L \frac{dx}{A(x)} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} -\lambda \cdot d\vartheta$$

$$\dot{Q}_x = \lambda (\vartheta_1 - \vartheta_2) / \frac{1}{k} \ln \left( \frac{kL + A_1}{A_1} \right)$$

a2) Strato cilindrico

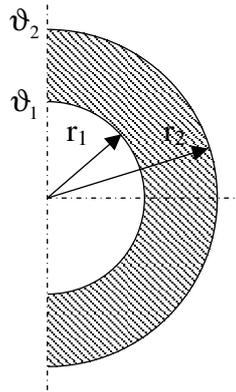


Fig. 7: Conduzione termica in regime stazionario: lo strato cilindrico

Nel caso dello strato cilindrico (fig. 7) si integra l'equazione di Laplace nella forma

$$\frac{\lambda}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = 0$$

Impiegando una variabile ausiliaria

$$u = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

l'equazione diventa a variabili separabili

$$\frac{1}{r} u + \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Da questa

$$\begin{aligned} \ln u &= -\ln r + C'_1 \\ &= -\ln r + \ln C_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

Infine

$$\vartheta(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

sono richieste due condizioni al contorno per definire il valore delle costanti di integrazione. Con riferimento alla geometria del sistema rappresentata in fig. 7 si può imporre il valore delle due superfici che delimitano lo strato piano:

$$\vartheta(r_1) = \vartheta_1$$

$$\vartheta(r_2) = \vartheta_2$$

da cui

$$\vartheta_1 = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$

$$\vartheta_2 = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2$$

e infine

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln r_1 - \ln r_2}$$

$$C_2 = \vartheta_2 - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \ln r_2$$

Pertanto la distribuzione della temperatura varia linearmente tra il valore considerato per la superficie 1 e quello della superficie 2:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln(r_1/r_2)} \cdot \ln(r/r_2) + \vartheta_2$$

Dalla distribuzione di temperatura si passa a quantificare il flusso termico nella forma

$$\dot{q} = \dot{q}_r = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}$$

mentre la potenza termica scambiata in corrispondenza di un'area di scambio  $A = 2 \pi r L$ , dove  $L$  è la lunghezza del cilindro, risulta pari a

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \lambda 2\pi r L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r} \\ &= \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \end{aligned}$$

La resistenza termica è pari a

$$R_{\text{cond}} = \frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Dato che nella geometria cilindrica la sezione di flusso cambia con il raggio, si possono definire distinti valori del coefficiente di scambio termico. Due in particolare sono quelli riferiti alla superficie interna  $A_1$  (in corrispondenza di  $r_1$ ) e alla superficie esterna  $A_2$  (in corrispondenza di  $r_2$ ). La potenza termica che attraversa le due superfici in regime stazionario è la stessa ed è quella espressa nell'equazione ricavata poco sopra:

$$\dot{Q} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{2\pi L \lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = K_1 A_1 (\vartheta_1 - \vartheta_2) = K_2 A_2 (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

da cui

$$K_1 = \frac{1}{R_{\text{cond}} A_1} = \left( \frac{r_1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right)^{-1} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{1}{R_{\text{cond}} A_2} = \left( \frac{r_2}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \right)^{-1}$$

L'estensione al caso di strato cilindrico composito è condotta analogamente a quanto visto per lo strato piano, e fornisce

$$\dot{Q} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{n+1}}{\sum_{k=1,n} \frac{1}{2\pi L \lambda_k} \ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)}$$

Nel caso invece di convezione alla superficie basta ricordare che nella particolare geometria cilindrica, le potenze scambiate per convezione alle superfici interna ed esterna dello strato cilindrico si possono esprimere come:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \alpha_1 \cdot 2\pi r_1 L \cdot (\vartheta_{F1} - \vartheta_1) \\ \dot{Q} &= \alpha_2 \cdot 2\pi r_2 L \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_{F2}) \end{aligned}$$

da cui

$$\dot{Q} = 2\pi r_1 L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{r_1}{\alpha_2 r_2}} = 2\pi r_2 L \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{r_2}{\alpha_1 r_1} + \frac{r_2}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\alpha_2}}$$

da cui

$$K_1 = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{r_1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{r_1}{\alpha_2 r_2} \right)^{-1} \quad \text{e} \quad K_2 = \left( \frac{r_2}{\alpha_1 r_1} + \frac{r_2}{\lambda} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$$

### Il raggio critico

Una particolare applicazione dell'espressione della potenza termica scambiata da un sistema in geometria cilindrica riguarda il caso di isolamento esterno di un condotto a sezione circolare (fig. 8). Assumendo trascurabile la resistenza termica del materiale che costituisce il condotto, sia per l'esiguo spessore della parete, sia per l'elevata conduttività termica del materiale, la temperatura sulla superficie esterna (per  $r=r_2$ ) dello stesso sarà uguale a quella della sua superficie interna (per  $r=r_1$ ).

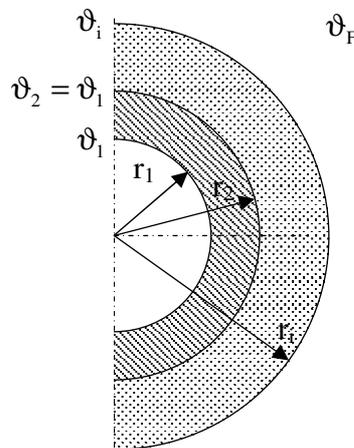


Fig. 8: Isolamento termico di un condotto a sezione circolare

Lo scambio termico potrà essere quantificato in termini di convezione alla superficie esterna (per semplicità  $\alpha_2=\alpha$ ) con il fluido a temperatura  $\vartheta_F$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_F}{\frac{1}{2\pi r_2 \alpha}}$$

Procedendo ad isolare il condotto, portando il raggio esterno da  $r_2$  a  $r_i$ , si può quantificare la dispersione legata allo scambio termico in sequenza attraverso lo spessore di isolante e attraverso la resistenza convettiva dell'aria esterna come:

$$\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_F}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln\left(\frac{r_i}{r_2}\right) + \frac{1}{2\pi r_i \alpha}}$$

La resistenza termica complessiva sarà data dalla somma di due termini

$$R = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{r_i}{r_2}\right) + \frac{1}{r_i \alpha} \right)$$

Mentre il primo cresce con  $r_i$  il secondo cala sempre con l'aumentare del raggio esterno del tubo isolato. In effetti l'apporto dello strato isolante introduce una resistenza conduttiva ma aumenta la superficie di scambio termico convettivo, riducendo la corrispondente resistenza convettiva. Derivandone l'espressione ed uguagliandola a zero

$$\frac{1}{r_i \lambda} - \frac{1}{r_i^2 \alpha} = 0$$

si dimostra che la resistenza termica assume un valore minimo in corrispondenza di un raggio isolato  $r_i = r_{cr}$  detto raggio critico

$$r_{cr} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

Il valore  $r_{cr}$  assume un significato fisico solo nel caso in cui risulti maggiore del raggio esterno iniziale del tubo non isolato  $r_2$ . Se infatti  $r_{cr} \leq r_2$ , dato il valore già basso della resistenza convettiva iniziale, l'apporto di materiale isolante risulta comunque sempre migliorativo nella prospettiva di una riduzione delle dispersioni (fig. 9).

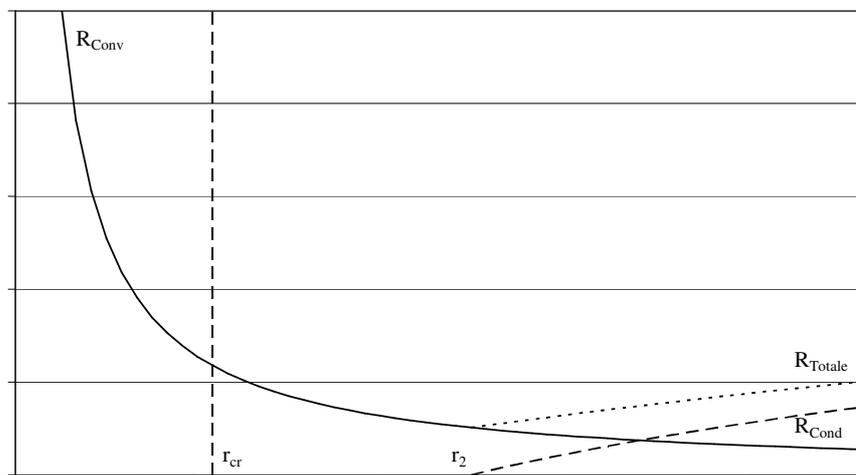


Fig. 9: Resistenza termica di un condotto circolare isolato  $r_{cr} < r_2$ .

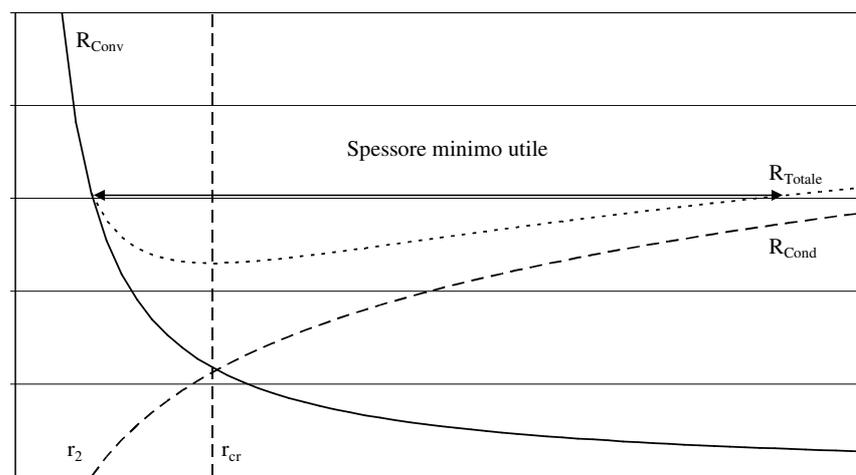


Fig. 10: Resistenza termica di un condotto circolare isolato  $r_{cr} > r_2$ .

Viceversa, se  $r_{cr} > r_2$  (fig. 10) bisogna avere l'accortezza che lo spessore di materiale isolante sia almeno tale da ripristinare la resistenza iniziale del sistema non isolato. In termini matematici si dovrà cioè imporre che

$$\frac{1}{r_2 \alpha} \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{r_1}{r_2} \right) + \frac{1}{r_1 \alpha}$$

a3) Strato sferico

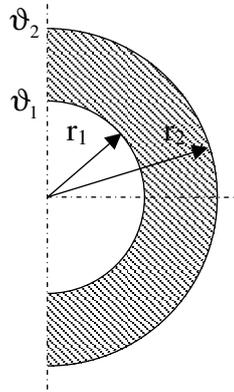


Fig. 11: Conduzione termica in regime stazionario: lo strato sferico

Nel caso dello strato sferico (fig. 11) si integra l'equazione di Laplace nella forma

$$\frac{2\lambda}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = 0$$

Impiegando una variabile ausiliaria

$$u = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

l'equazione diventa a variabili separabili

$$\frac{2}{r} u + \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Da questa

$$\begin{aligned} \ln u &= -2 \ln r + C'_1 \\ &= -2 \ln r + \ln C''_1 \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{C''_1}{r^2}$$

Infine

$$\vartheta(r) = C_1 / r + C_2$$

sono richieste due condizioni al contorno per definire il valore delle costanti di integrazione. Con riferimento alla geometria del sistema rappresentata in fig. 7 si può imporre il valore delle due superfici che delimitano lo strato piano:

$$\begin{aligned} \vartheta(r_1) &= \vartheta_1 \\ \vartheta(r_2) &= \vartheta_2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= C_1 / r_1 + C_2 \\ \vartheta_2 &= C_1 / r_2 + C_2 \end{aligned}$$

e infine

$$C_1 = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

$$C_2 = \vartheta_2 - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r_2}$$

Pertanto la distribuzione della temperatura varia linearmente tra il valore considerato per la superficie 1 e quello della superficie 2:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right) + \vartheta_2$$

Dalla distribuzione di temperatura si passa a quantificare il flusso termico nella forma

$$\dot{q} = \dot{q}_r = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \lambda \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2}$$

mentre la potenza termica scambiata in corrispondenza di un'area di scambio  $A=2 \pi r L$ , dove  $L$  è la lunghezza del cilindro, risulta pari a

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \lambda 4\pi r^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \end{aligned}$$

La resistenza termica è pari a

$$R_{\text{cond}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Al medesimo risultato sarebbe stato possibile pervenire integrando direttamente l'equazione

$$\dot{Q} = -\lambda 4\pi r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

dopo aver separato le variabili

$$\begin{aligned} \dot{Q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{4\pi r^2} &= -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \lambda d\vartheta \\ \dot{Q} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) &= -\lambda(\vartheta_2 - \vartheta_1) \end{aligned}$$

da cui

$$\dot{Q} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)}$$

b) *Casi con generazione interna*

Il campo di temperatura viene desunto dall'integrazione dell'equazione di Poisson, nella semplificazione consentita dalla monodimensionalità del sistema. Si considerano anche in questo caso sistemi nei quali la conduttività termica risulta indipendente dalla temperatura. L'analisi si limiterà a quantificare la distribuzione di temperatura nel sistema, senza procedere a quantificare il flusso termico o la potenza termica, legati in particolare alla generazione interna. Per valutare queste grandezze sarà sempre possibile applicare la legge di Fourier in corrispondenza dei punti più significativi del sistema, quali ad esempio le superfici di confine.

b1) Strato piano

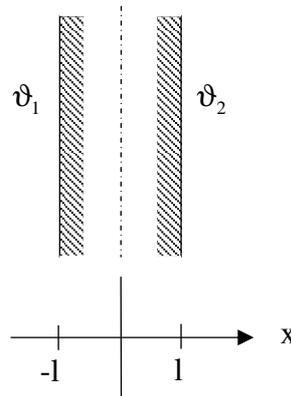


Fig. 12: *Conduzione termica in regime stazionario con generazione interna: geometria piana*

Assunta una disposizione del sistema di riferimento simmetrica rispetto all'asse mediano dello strato (fig. 12), l'integrazione della equazione generale della conduzione nella forma dell'equazione di Poisson

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -\frac{\dot{q}_g}{\lambda}$$

fornisce l'integrale generale

$$\vartheta = -\frac{\dot{q}_g}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$$

Se la distribuzione di temperatura non è simmetrica:

$$\vartheta(-1) = \vartheta_1$$

$$\vartheta(1) = \vartheta_2$$

e

$$\vartheta_1 = -\frac{\dot{q}_g}{2\lambda} 1^2 - C_1 1 + C_2$$

$$\vartheta_2 = -\frac{\dot{q}_g}{2\lambda} 1^2 + C_1 1 + C_2$$

da cui si ricavano le costanti di integrazione

$$C_1 = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2l}$$

$$C_2 = \frac{\dot{q}_g}{2\lambda} l^2 + \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2}$$

che, sostituite nell'integrale generale, forniscono il profilo di temperature ricercato

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_g}{2\lambda} (l^2 - x^2) + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2l} x + \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2}$$

Viceversa, per configurazioni simmetriche con  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ , si ottiene

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_g}{2\lambda} (l^2 - x^2) + \vartheta_1$$

Il profilo di temperatura in ogni caso si mantiene parabolico, con un valore massimo che nella configurazione simmetrica coincide con l'asse di simmetria del sistema.

Se le condizioni al contorno non fossero di temperatura ma di convezione, si può esprimere la temperatura alla superficie dello strato in funzione del calore scambiato convettivamente, della temperatura del fluido e del coefficiente di convezione.

Si deve tra l'altro osservare che in regime stazionario il calore ceduto per convezione è pari a quello generato internamente allo strato piano. Per ognuna delle due superfici si può scrivere

$$\dot{q}_g l A = \alpha A (\vartheta_1 - \vartheta_F)$$

da cui

$$\vartheta_1 = \vartheta_F + \frac{\dot{q}_g l}{\alpha}$$

e quindi

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_g}{2\lambda} (l^2 - x^2) + \frac{\dot{q}_g l}{\alpha} + \vartheta_F$$

b2) Strato cilindrico

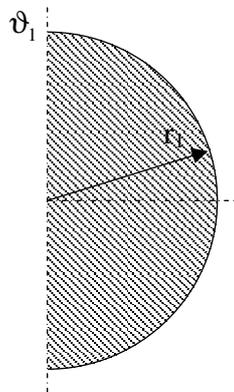


Fig. 13: Conduzione termica in regime stazionario con generazione interna: geometria cilindrica

Diversamente dalla trattazione relativa al caso senza generazione interna si assumerà un sistema cilindrico pieno, come rappresentato in fig. 13. L'equazione di Poisson da integrare assume la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \dot{q}_g = 0$$

Con l'introduzione di una variabile ausiliaria

$$f = \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

le variabili dell'equazione risultano separabili:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -\dot{q}_g r$$

Da questa

$$f = -\frac{\dot{q}_g}{2} r^2 + C_1$$

Sostituendo a  $f$  la sua espressione nelle variabili originarie ciò equivale a scrivere

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\frac{\dot{q}_g}{2\lambda} r + \frac{C_1}{\lambda r}$$

da cui

$$\vartheta(r) = -\frac{\dot{q}_g}{4\lambda} r^2 + \frac{C_1}{\lambda} \cdot \ln r + C_2$$

Le condizioni al contorno sono date dalla temperatura fissata per la superficie e dallo scambio termico in corrispondenza della superficie, che deve eguagliare il calore generato complessivamente nel cilindro.

In termini analitici

$$\begin{aligned} \vartheta(r_1) &= \vartheta_1 \\ 2\pi r_1 L \left( -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \right) &= 2\pi r_1 L \dot{q}_g \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -\frac{\dot{q}_g}{4\lambda} r_1^2 + \frac{C_1}{\lambda} \cdot \ln r_1 + C_2 \\ -2\lambda \left( -\frac{\dot{q}_g}{2\lambda} r_1 + \frac{C_1}{\lambda r_1} \right) &= r_1 \dot{q}_g \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\dot{q}_g}{4\lambda} r_1^2 - \frac{C_1}{\lambda} \cdot \ln r_1 + \vartheta_1 \\ \frac{C_1}{\lambda r_1} &= 0 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\vartheta(r) = \frac{\dot{q}_g}{4\lambda} (r_1^2 - r^2) + \vartheta_1$$

Se le condizioni al contorno non fossero di temperatura ma di convezione, ricordando che in regime stazionario il calore ceduto per convezione deve essere pari a quello generato internamente al cilindro, si può scrivere

$$\dot{q}_g \pi r_1^2 L = \alpha 2\pi r_1 L (\vartheta_1 - \vartheta_F)$$

da cui

$$\vartheta_1 = \vartheta_F + \frac{\dot{q}_g r_1}{2\alpha}$$

e quindi

$$\vartheta(r) = \frac{\dot{q}_g}{4\lambda} (r_1^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_g r_1}{2\alpha} + \vartheta_F$$

b3) Strato sferico

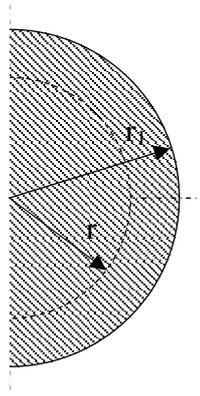


Fig. 14: Conduzione termica in regime stazionario con generazione interna: geometria sferica

L'integrazione dell'equazione di Poisson non risulta particolarmente agevole. Conviene ricorrere alla legge di Fourier che quantifica la potenza termica scambiata attraverso una superficie sferica di raggio  $r$  interna al sistema come

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}$$

Date le condizioni di stazionarietà, tale potenza deve essere uguale a quella generata all'interno della sfera fino al raggio  $r$

$$\dot{Q} = \dot{q}_g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

Dalle due equazioni scritte

$$-\lambda \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \dot{q}_g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

e quindi

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\frac{\dot{q}_g}{3\lambda} r$$

La soluzione generale risulta pertanto

$$\vartheta = -\frac{\dot{q}_g}{6\lambda} r^2 + C_1$$

Basterà la condizione al contorno di temperatura in corrispondenza della superficie del sistema

$$\vartheta_1 = -\frac{\dot{q}_g}{6\lambda} r_1^2 + C_1$$

da cui la soluzione particolare è data da

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_g}{6\lambda} (r_1^2 - r^2) + \vartheta_1$$

Con condizioni di convezione alla superficie, basta osservare che

$$\dot{q}_g \frac{4}{3} \pi r_1^3 = \alpha \cdot 2\pi r_1^2 (\vartheta_1 - \vartheta_F)$$

da cui

$$\vartheta_1 = \frac{\dot{q}_g r_1}{3\alpha} + \vartheta_F$$

e quindi

$$\vartheta = \frac{\dot{q}_g}{6\lambda} (r_1^2 - r^2) + \frac{\dot{q}_g r_1}{3\alpha} + \vartheta_F$$

Si può osservare che lo stesso approccio poteva essere utilizzato anche nel ricavare le distribuzioni di temperatura per la geometria cilindrica.

### Le superfici estese

Lo scambio termico tra la superficie di un sistema e il fluido che lo lambisce è caratterizzabile attraverso la legge di Newton

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_s - \vartheta_F)$$

Per aumentare la potenza scambiata, a parità di coefficiente di convezione e di differenza di temperatura tra la superficie di contatto e il fluido, non resta che aumentare la superficie di scambio a disposizione.

Usualmente nella tecnica ciò viene ottenuto tramite la realizzazione di alettature di varia forma e sezione, che vengono disposte o ricavate sulla superficie di scambio originaria. La geometria dello scambio termico si complica notevolmente. Come nel caso dell'isolamento, il risultato può non essere quello ricercato. Infatti in corrispondenza dell'aletta di fatto viene aggiunta alla superficie originaria una resistenza termica convettiva supplementare. Questa deve essere giustificata da un significativo aumento dello scambio termico legato all'estensione della superficie di scambio.

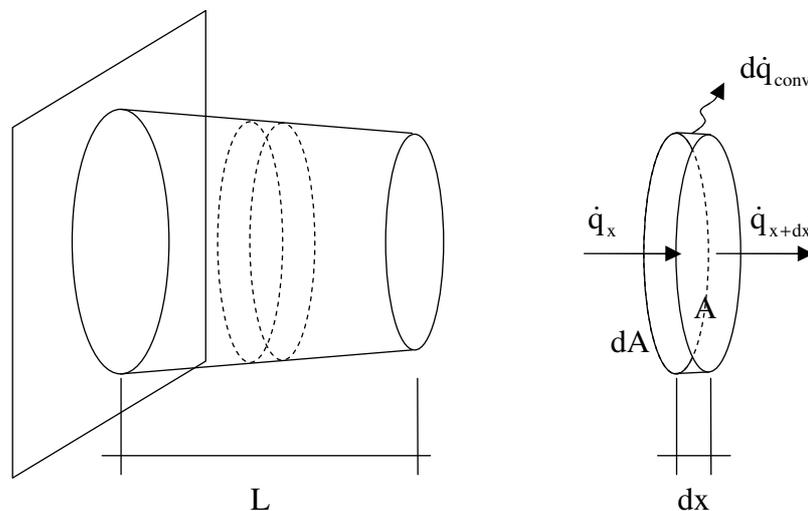


Fig. 15: Analisi termica delle alette

Impostando il bilancio per un elemento infinitesimo di spessore dx dell'aletta nell'ipotesi di regime stazionario, si può scrivere

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} - d\dot{Q}_{conv} = 0$$

dove

$$\dot{Q}_x = -\lambda \cdot A \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{d\dot{Q}_x}{dx} dx = -\lambda \cdot A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx$$

$$d\dot{Q}_{conv} = \alpha \cdot dA(\vartheta - \vartheta_F)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \cdot A \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx - \alpha \cdot dA(\vartheta - \vartheta_F) = 0$$

Nel caso in cui la sezione dell'aletta sia costante e indipendente da x e si sostituisca l'area laterale dA con il prodotto tra il perimetro P dell'aletta e la lunghezza dx dell'elemento considerato:

$$\lambda \cdot A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \alpha \cdot P(\vartheta - \vartheta_F) = 0$$

Chiamando

$$m^2 = \frac{\alpha P}{\lambda A}$$

e introducendo una variabile ausiliaria

$$\Theta = \vartheta - \vartheta_F$$

l'equazione da integrare diventa

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - m^2 \Theta = 0$$

che ammette una soluzione generale nella forma

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Ricordando che

$$e^{mx} = \cosh(mx) + \sinh(mx) \quad e^{-mx} = \cosh(mx) - \sinh(mx)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Theta &= C_1 (\cosh(mx) + \sinh(mx)) + C_2 (\cosh(mx) - \sinh(mx)) \\ &= (C_1 + C_2) \cosh(mx) + (C_1 - C_2) \sinh(mx) \\ &= C'_1 \cosh(mx) + C'_2 \sinh(mx) \end{aligned}$$

Tra le possibili condizioni al contorno, possiamo imporre quelle di temperatura alla base pari a  $\vartheta_b$ , e di convezione all'estremità, nella forma

$$\begin{aligned} \Theta|_{x=0} &= \Theta_b \\ -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{x=L} &= \alpha \Theta_L \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \Theta_b &= C'_1 \cosh(0) + C'_2 \sinh(0) \\ -\lambda m C'_1 \sinh(mL) - \lambda m C'_2 \cosh(mL) &= \alpha C'_1 \cosh(mL) + \alpha m C'_2 \sinh(mL) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} C'_1 &= \Theta_b \\ C'_2 &= -\Theta_b \frac{\lambda m \sinh(mL) + \alpha \cosh(mL)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha \sinh(mL)} \end{aligned}$$

La soluzione particolare è dunque data dalla

$$\Theta = \Theta_b \cosh(mx) - \Theta_b \frac{\lambda m \sinh(mL) + \alpha \cosh(mL)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha \sinh(mL)} \sinh(mx)$$

da cui:

$$\frac{\Theta}{\Theta_b} = \frac{(\lambda m \cosh(mL) + \alpha \sinh(mL)) \cosh(mx) - (\lambda m \sinh(mL) + \alpha \cosh(mL)) \sinh(mx)}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha \sinh(mL)}$$

che può essere scritta come:

$$\frac{\Theta}{\Theta_b} = \frac{\lambda m \cosh(m(L-x)) + \alpha \sinh(m(L-x))}{\lambda m \cosh(mL) + \alpha \sinh(mL)}$$

È possibile esaminare anche il caso di convezione nulla all'estremità dell'aletta, che corrisponde a considerare un coefficiente di convezione  $\alpha$  pari a zero. In questo caso:

$$\frac{\Theta}{\Theta_b} = \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}$$

La **potenza termica dissipata** dalla singola aletta è pari a quella che attraversa per conduzione la base della stessa:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\lambda A \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = \\ &= -\lambda A \left. \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right|_{x=0} = \lambda A m \Theta_b \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)} = \lambda A m \Theta_b \tanh(mL) \end{aligned}$$

Si definiscono infine l'efficienza dell'aletta e l'efficienza della superficie alettata. Queste sono definite rispettivamente come rapporto tra il calore o la potenza termica effettivamente scambiata dall'aletta o dalla superficie alettata e quella che sarebbe stata dispersa dall'aletta o dalla superficie alettata nel caso in cui tutta la superficie esposta si fosse trovata alla temperatura della base dell'aletta  $\vartheta_b$ .

L'**efficienza dell'aletta** risulta quindi pari a

$$\Omega = \frac{\lambda A m \Theta_b \tanh(mL)}{\alpha P L \Theta_b} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

La fig. 16 illustra la dipendenza dell'efficienza dell'aletta dal prodotto  $mL$ . Si vede come l'efficienza decresca progressivamente al crescere di tale prodotto. Il termine  $m$ , in particolare aumenta al crescere di  $\alpha$ , mentre cala con  $\lambda$ .

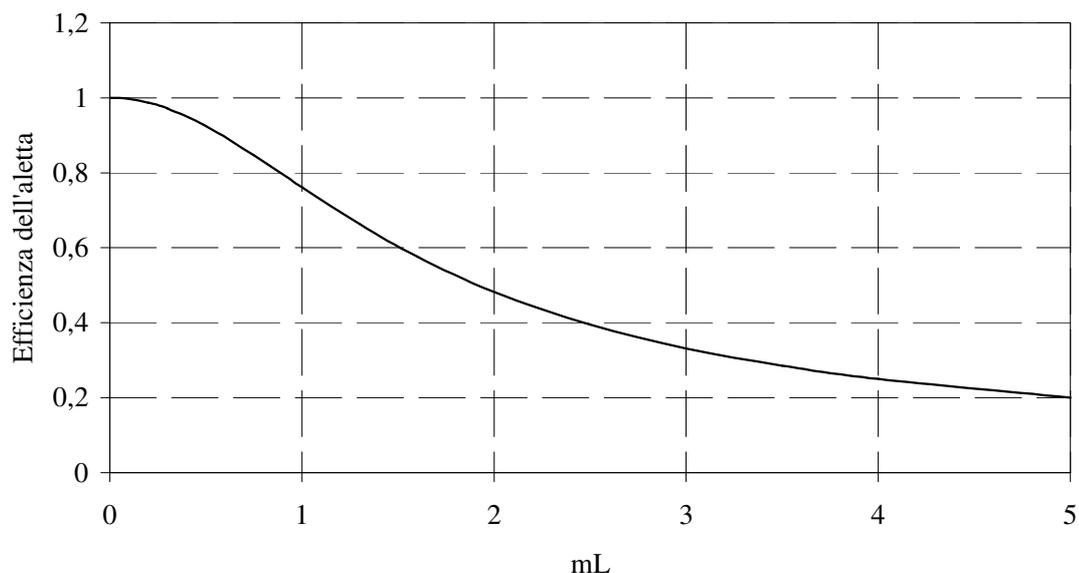


Fig. 16: Efficienza dell'aletta in funzione del prodotto  $mL$

Ciò significa che:

- l'applicazione delle alettature è più adatta a situazioni di scambio termico con bassi coefficienti di convezione (ad esempio con sistemi lambiti da fluidi gassosi piuttosto che liquidi)
- il materiale di cui è costituita l'aletta dovrà possedere una elevata conduttività termica

Situazioni in cui si abbia a che fare con elevati coefficienti di convezione o basse conduttività l'applicazione dell'aletta può risultare controproducente, dato che l'aumento della resistenza conduttiva non è compensato dall'aumento dello scambio convettivo in corrispondenza di una maggiore superficie di scambio.

L'**efficienza della superficie alettata**, considerando  $A_{tot}$  come intera superficie disperdente pari alla somma della superficie disperdente dell'aletta  $A_a$  (il prodotto di  $P$  ed  $L$ ) e di quella libera alla base, vale

$$\begin{aligned}\Omega_{sup} &= \frac{\alpha(A_{tot} - A_a)\Theta_b + \Omega\alpha A_a\Theta_b}{\alpha A_{tot}\Theta_b} = \\ &= 1 - \frac{A_a}{A_{tot}}(1 - \Omega)\end{aligned}$$

### Conduzione termica in regime variabile

Tra le diverse configurazioni che richiedono la soluzione dell'equazione generale della conduzione in regime non stazionario si è scelto di esaminare quella relativa ad un caso applicativo particolare. Si tratta della condizione che si verifica quando uno strato piano semi-infinito è sottoposto a una condizione al contorno di temperatura superficiale variabile sinusoidalmente:

$$\vartheta = \vartheta_0 + A \sin(\omega\tau)$$

dove  $t_0$  è la temperatura superficiale media,  $A$  è l'ampiezza della variazione superficiale di temperatura, pari a  $t_{max} - t_0$  o a  $t_0 - t_{min}$ , mentre  $\omega$  è la pulsazione

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} = 2\pi f$$

con  $\tau_0$  periodo e  $f$  frequenza della variazione.

La soluzione particolare dell'equazione generale della conduzione per la situazione descritta è pari a:

$$\vartheta = \vartheta_0 + Ae^{-\gamma x} \sin(\omega\tau - \gamma x)$$

Il termine  $\gamma$  è la **costante di smorzamento**:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}$$

mentre  $e^{-\gamma x}$  è il **fattore di smorzamento**.

Si osserva in particolare come per  $x=0$  la soluzione riproponga la condizione al contorno imposta. Procedendo per valori di  $x$  crescenti, la variazione di temperatura si mantiene sinusoidale attorno allo stesso valore medio ma presenta una ampiezza che progressivamente si riduce in ragione pari al fattore di smorzamento. Subentra inoltre uno **sfasamento angolare** pari a

$$\gamma x$$

che in termini di tempo corrisponde ad uno **sfasamento temporale** o ritardo pari a

$$\frac{\gamma x}{\omega}$$

La lunghezza d'onda  $L$  corrisponde a quella differenza di ascisse tra le quali la variazione di temperatura si presenta in concordanza di fase in un certo istante. A partire dalla superficie del sistema, ad esempio, la prima posizione  $x$  per la quale c'è concordanza di fase è quindi tale per cui (il segno meno è richiesto per il ritardo di fase che si verifica al procedere lungo  $x$ ):

$$\omega\tau - 2\pi = \omega\tau - \gamma x$$

da cui

$$L = x = \frac{2\pi}{\gamma} = 2\sqrt{\pi a \tau_0}$$

Dato che la distanza di una lunghezza d'onda è coperta in un tempo pari al periodo di pulsazione, la velocità di propagazione dell'onda è pari a

$$w = \frac{L}{\tau_0} = \frac{2\pi}{\gamma\tau_0} = \frac{\omega}{\gamma}$$

Il flusso termico è pari a

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \sqrt{2} \lambda \gamma A e^{-\gamma x} \sin\left(\omega\tau - \gamma x + \frac{\pi}{4}\right)$$

e risulta in anticipo di fase sulla temperatura.